5

В задачах 39-46 исследовать функционал на выпуклость и сильную выпуклость:

+ Задача 39. $J(u) = \int\limits_0^1 \rho(t)u^2(t)dt$ *в* $L^2(0,1)$; $\rho(t) \geq \rho_0 > 0$ - *непрерывна на [0,1].*

$\rho_0 \leq \rho(t) \leq M$ - конеч.

Решение. A ограничен: $\|Au\|^2 = \int_0^1 \rho^2(t)u^2(t)dt \leq M^2 \int_0^1 u^2(t)dt = M^2\|u\|^2$

$$J(u) = \langle Au, u \rangle_{L^2(0,1)}$$

очевидно линеен $Au : u(t) \to \rho(t)u(t), \quad A = A^*,$

$$\langle J''(u)h, h \rangle = \langle (A+A^*)h, h \rangle = 2\langle Ah, h \rangle = 2\langle \rho(t)h, h \rangle \geqslant 2\rho_0\langle h, h \rangle = \overset{\varkappa}{2\rho_0}\|h\|^2.$$

Следовательно, по критерию сильной выпуклости $J(u)$ является сильно выпуклым. □

+ Задача 40. $J(u) = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 u^2(t)dt$ *в* $L^2(0,1)$.

Решение.

$$J(u) = \|Au\|^2_{L^2} \Rightarrow \text{авт. сил. вып. на всем } L^2(0,1)$$

$$Au : u(t) \to \hat{v}(t),$$

очевидно, лин. и огр.

$$\hat{v}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ u(t), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Найдем сопряженный оператор:

$$\langle Au, v \rangle = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 u(t)v(t)dt = \langle u, A^*v \rangle,$$

следовательно, $A = A^*$.

$$0 \leq 2\int_{1/2}^1 h^2(t)dt = \langle J''(u)h, h \rangle$$

$J''(u) = 2A^*A = 2A^2$

$\langle J''(u)h, h \rangle_{L^2} = 2\langle A^2h, h \rangle_{L^2}$

$A^2h = Ah = \begin{cases} 0, & t \in [0; 1/2) \\ h, & t \in [1/2; 1] \end{cases}$

для $h = \begin{cases} 1, & [0; 1/2) \\ 0, & [1/2; 1] \end{cases}$ $Ah \equiv 0$

$\underbrace{2\langle A^2h, h \rangle}_{=0} \not\geq \underbrace{\mu}_{>0} \underbrace{\|h\|^2}_{=1/2}$

По критерию выпуклости $J(u)$ является выпуклым, но так как неравенство $\langle J''(u)h, h \rangle > 0$ выполняется не всегда, $J(u)$ не является сильно выпуклым. □

+ **Задача 42.** $J(u)=\int\limits_0^1 u(t)u(1-t)dt$ *в* $L^2(0,1)$.

Решение.

линейность (очевидно)
огр-й

$$J(u)=\langle Au,u\rangle,$$

$$A: u(t)\to u(1-t).\quad A: L^2(0,1)\to L^2(0,1).$$

Найдем сопряженный оператор:

$$\langle Au,v\rangle = \int\limits_0^1 u(1-t)v(t)dt = \{p=1-t\} = \int\limits_0^1 u(p)v(1-p)dp = \langle u, A^*v\rangle,$$

$$A*: v(t)\to v(1-t),\quad A=A^*.$$

$$\langle J''(u)h,h\rangle = 2\langle Ah,h\rangle = 2\int\limits_0^1 h(t)h(1-t)dt.$$

Возьмем $h(t)$:

$$h\ (t)=\begin{cases}1,\ t\in[0,\frac12)\\ -1,\ t\in[\frac12,1],\end{cases}$$

следовательно, неравенство $\langle J''(u)h,h\rangle\geqslant 0$ выполняется не всегда, и $J(u)$ не является выпуклым. □

+ **Задача 43.** $J(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{\frac1n}x_n^2$ *в* l^2.

(очевидно)
Лин.: $A(\alpha x+\beta y) = (e^1(\alpha x_1+\beta y_1), \dots, e^{\frac1n}(\alpha x_n+\beta y_n), \dots) = \alpha(e^1x_1,\dots,e^{1/n}x_n,\dots)+\beta(e^1y_1,\dots,e^{1/n}y_n,\dots)$ $\in l_2$

$$2\langle Ah,h\rangle = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{e^{\frac1n}}_{\geqslant 1} h_n^2 \geqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty} h_n^2 = 2\|h\|^2_{l_2},$$

Решение

A-огр.

$$J(x)=\langle Ax,x\rangle,$$

$$\|Ax\|^2_{l_2} = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2 e^{2/n} \leqslant e^2\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2 = e^2\|x\|_{l_2}$$

$\in l_2$

$$A: (x_1,x_2,x_3,\dots,x_n,\dots)\to(e^1 x_1, e^{\frac12}x_2, e^{\frac13}x_3,\dots,e^{\frac1n}x_n,\dots),\quad A=A^*.$$

$$\langle J''(x)h,h\rangle = 2\langle Ah,h\rangle \geqslant 2\|h\|^2,$$

следовательно, $J(u)$ является сильно выпуклым. □

+ **Задача 44.** $J(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac1n x_n^2$ *в* l^2.

{A очев. лин}

$\|Ax\|^2_{l_2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n^2}{n^2} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n^2 = \|x\|^2_{l_2}$ → A-огр

$\langle Ax,y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ очевидно

Решение.

$$J(x)=\langle Ax,x\rangle,$$

$$A:(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\dots)\to(\frac{x_1}{1},\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\dots,\frac{x_n}{n},\dots),\quad A=A^*.$$

$\forall h$ $2\langle Ah,h\rangle = 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{h_n^2}{n}\geqslant 0$

$$\langle J''(x)h,h\rangle = 2\langle Ah,h\rangle = \frac2n\|h\|^2 \not\geqslant \varkappa\|h\|^2,\quad \varkappa>0$$

для $h=(0,\dots,0,h_n,0,\dots)$
$h_n^2=\|h\|^2_{l_2}$

$J(u)$ является выпуклым, но не является сильно выпуклым. □

+ **Задача 45.** $J(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_nx_{n+1}$ *в* l^2.

Решение.

A-ограничен $\|Ax\|^2_{l_2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{k+1}^2 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \|x\|^2_{l_2}$

$$J(x)=\langle Ax,x\rangle,$$

линейность очевидна $A:(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n,\dots)\to(x_2,x_3,x_4,\dots x_{n+1},\dots),$

$$A^*: (x_1,x_2,x_3,\dots,x_n,\dots)\to(0,x_1,x_2,\dots,x_{n-1},\dots).$$

{$\|A^*y\|_{l_2}=\|y\|_{l_2}$}

$$\langle J''(x)h,h\rangle = \langle (A+A^*)h,h\rangle =$$

$$=\langle (0+h_2, h_1+h_3, h_2+h_4,\dots,h_{n-1}+h_{n+1},\dots),(h_1,h_2,h_3,\dots,h_n,\dots)\rangle=$$

$$=2(h_1h_2+h_2h_3+h_3h_4+\dots).$$

Возьмем h такое, что $h_i>0$ для всех нечетных i и $h_i<0$ для всех четных i. Тогда $2(h_1h_2+h_2h_3+h_3h_4+\dots)<0$, $J(u)$ не является выпуклым. □

если все $h_i>0$, то $\langle J''(x)h,h\rangle>0$
{и не явл. вогнутым

+ **Задача 46.** $J(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_{2n-1}+2x_{2n})^2$ *в* l^2.

Решение.

$$J(x)=\|Ax\|^2,$$

линейность очевидна $A:(x_1,x_2,x_3,\dots)\to(x_1+2x_2, x_3+2x_4,\dots)$. $\in l_2$

A-огр.: $\|Ax\|^2 = (x_1+2x_2)^2+(x_3+2x_4)^2+\dots \leqslant 2x_1^2+8x_2^2+2x_3^2+8x_4^2+\dots\leqslant$

$$\leqslant 8(x_1^2+x_2^2+\dots) = 8\|x\|^2,$$

т.к. $J(u) = \|Au\|^2$

$J(u)$ является выпуклым. Надо:

$$\langle J''(u)h, h\rangle = 2\langle A^*Ah, h\rangle = 2\|Ah\|^2 \overset{?}{\geqslant} \varkappa\|h\|^2.$$

Найдем вектор из ядра оператора:

$$h = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots), \in l_2$$

$$\|h\|^2 = 1^2 + (-\frac{1}{2})^2 + \dots = \frac{4}{3}$$

$$Ah = (0, 0, \dots), \quad \|Ah\| = 0,$$

следовательно, $J(u)$ не является сильно выпуклым.